Mathe-Treff OTW 2024

Lösungen für die gymnasiale Oberstufe

AUFGABE 1 (Würfelkomposition)

a)

$3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b)

Der gesamte Würfel besteht aus $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
Würfeln. Zieht man die äußeren Schichten ab, bleiben $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
bemalte Würfel im Inneren übrig.

c)

Der Würfel besteht aus $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleinen Würfeln. Auf jeder Seite wird der mittlere Würfel entfernt. Außerdem der Würfel ganz in der Mitte. Insofern werden 7 sieben kleine Würfel entfernt.

Daher bleiben 20 kleine Würfel übrig.

d)

Der Würfel ohne Löcher besteht aus $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kleinen Würfeln. Durch das Entfernen werden 44 kleine Würfel entfernt und 81 kleine Würfel bleiben übrig.
Man kann sich das so vorstellen:
Der 5er Würfel wird in fünf Schichten (von oben nach unten) zerlegt. In der ersten, der dritten und der fünften Schicht sind jeweils 5+5+5+3+3= 21 Würfel enthalten. In der zweiten und vierten Schicht sind jeweils 9 kleine Würfel enthalten.
Dies ergibt zusammen 21+21+21+9+9 = 81. Es fehlen also 44 Würfel.

e)

Der Würfel ohne Löcher besteht aus $7^3 = 343$ kleinen Würfeln.

Der „5er" Würfel hatte pro Seitenfläche 4 Löcher. Demzufolge hat der „7er" Würfel pro Seitenfläche 9 Löcher.

Man zerlegt den 7er Würfel in sieben Schichten (von oben nach unten). In der ersten, der dritten und der fünften und siebten sind jeweils 7+7+7+7+4+4+4=40 Würfel enthalten. In der zweiten und vierten und sechsten Schicht sind jeweils 9 Würfel.
Dies ergibt zusammen 40+40+40+40+12+12+12 = 208. Es fehlen also 343 - 208 = 135 Würfel.

f)

Der Würfel ohne Löcher besteht aus $101^3 = 1\,030\,301$ kleinen Würfeln.

Man kann für die Anzahl der Würfel des Restkörpers wieder systematisch probieren, wie bei den „5er“ und „7er“ Würfeln. Einfacher ist es sich eine allgemeine Formel dafür zu überlegen:

Bei diesem Würfel besteht die Kantenreihe aus a = 101 kleinen Würfeln. Die Würfelreihen werden so entfernt, dass beispielsweise nur auf der Vorderseite n^2 ($n > 0$) quadratische Löcher entstehen.
Der Würfel hat also die Kantenlänge 101 (= a). Die Vorderseite hat also eine Länge und Breite von jeweils 101 kleinen Würfeln. Wenn man die Kantenreihen, welche massiv sind, außer Acht lässt, so gibt es dann zu einer Parallelen zu einer Kantenreihe 50 (= n) Löcher und 51 (= n+1) kleine Würfel. Es gibt also 50 · 50 = 2500 “Löcher“ in der Vorderseite, also 2500 Löcher pro Seitenfläche.

Die führt dann zu folgender allgemeinen Überlegung.

Für die Anzahl A der Würfel des Restkörpers gilt allgemein:
$A_{Rest} = a^3 - a \cdot 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n^3$;

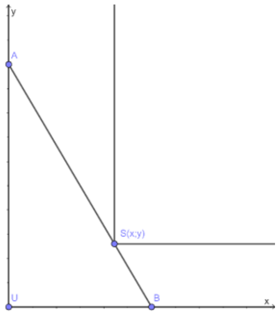
mit

- Gesamtzahl der kleinen Würfel im nicht durchlöcherten Würfel: a^3,
- Anzahl der Würfel der entfernten Würfelreihe der Höhe a:
  diese sind n^2 mal pro „Doppelseitenfläche“ vorhanden, also $a \cdot 3 \cdot n^2$,
- Die zu viel abgezogenen kleinen Würfel: $2 \cdot n^3$.

Mit a = 101, n = 50 ergibt sich:
$A_{\text{Rest}} = 101^3 - 101 \cdot 3 \cdot 50^2 + 2 \cdot 50^3 = 522\,801$ kleine Würfel.
Der 101er Würfel besteht also aus 522 801 kleinen Würfeln.

Auf Grund des Prinzips der Konstruktion muss die Anzahl der Würfel pro Kantenreihe immer ungerade sein.
Es gibt pro Seitenfläche n^2 Löcher.
Für die Anzahl der kleinen Würfel ergibt sich:
$A_{\text{Rest}} = a^3 - a \cdot 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n^3$.

AUFGABE 2 (Die Leiter)



Seien x und y die Breite des Kriechkellers vor bzw. nach der Ecke. Man lege Koordinatensystem derart an, dass die Außenseiten des Kriechkellers auf den positiven Achsen liegen und die äußere Ecke auf dem Ursprung U. Man konstruiere nun eine lineare Funktion so durch den Punkt $S(x; y)$, dass die positive Seite der y-Achse in A und die positive Seite der x-Achse in B geschnitten werden und m der Betrag der Steigung sei. Das Minimum der Länge der Strecke AB ist die maximale Länge der Leiter. Die Funktion lautet demnach $f(l) = -m(l - x) + y$.

Nach der Funktion haben die Punkte die Koordinaten $A(0; xm + y)$ und $B(y/m + x; 0)$. Durch das Anwenden des Satz des Pythagoras im Dreieck AUB, ergibt sich für die Strecke von A nach B: $|\overline{AB}| = \sqrt{\left(\frac{y}{m} + x\right)^2 + (xm + y)^2}$ (1).

Die Länge der Strecke wird minimal, wenn der Term unter der Wurzel minimal wird. Sei $g(m) = \left(\frac{y}{m} + x\right)^2 + (xm + y)^2$ der Radikand, dann ist die Ableitung $g'(m) = \frac{2}{m^3}(xm + y)(xm^3 - y)$.

g´(m) hat zwei Nullstellen in der Menge der reellen Zahlen. Die Nullstelle für $m = -y/x$ entfällt, da ansonsten A und B dieselben Koordinaten hätten. Die andere Nullstelle für $m = \frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$ (2)

ergibt das gesuchte Minimum, wie einsetzen in die 2. Ableitung $g''(m) = \frac{4xy}{m^3} + \frac{6y^3}{m^4} + 2x^2$ bestätigt.

Bezirksregierung
Düsseldorf

Die maximale Länge der Leiter ergibt sich durch Einsetzen von (2) in (1) (alternativ mit CAS):

$$|\overline{AB}| = \sqrt{\left(\frac{y\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} + x\right)^2 + \left(x\frac{\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}} + y\right)^2} = \sqrt{a}$$

$$a = \frac{y^2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{y^2}} + \frac{2y\sqrt[3]{x}\cdot x}{\sqrt[3]{y}} + x^2 + \frac{x^2\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2+\sqrt[3]{y}y}{\sqrt[3]{x}} + y^2$$

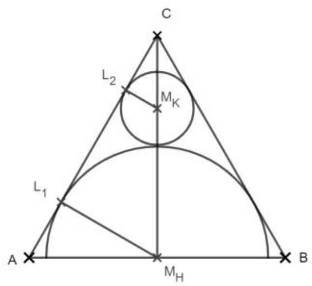
$$= y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + x^2 + x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y^2$$

$$= x^2 + 3\sqrt[3]{x^4}\sqrt[3]{y^2} + 3\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y^4} + y^2$$

$$= \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^3$$

Also ergibt sich daraus $|\overline{AB}| = \sqrt{\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}\right)^3}$.

AUFGABE 3 (Kuchenschlacht)



Die Eckpunkte des gleichseitigen Dreiecks bezeichnen wir mit A, B und C. Die inneren Winkel des Dreiecks ABC an diesen Eckpunkten müssen alle 60 Grad groß sein, da es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt. Den Mittelpunkt des Halbkreises bezeichnen wir mit M_H und den Mittelpunkt des Kreises mit M_K. Der Mittelpunkt des Halbkreises soll auf einer der Seiten des Dreiecks liegen. Wir wählen dafür die Seite AB.

Die beiden Mittelpunkte müssen auf der Mittelsenkrechten der Seite AB liegen. In einem gleichseitigen Dreieck ist nämlich jede Winkelhalbierende zugleich auch die Mittelsenkrechte, Höhe und Winkelhalbierende der dem Winkel gegenüberliegenden Seite. Sie ist zudem eine Spiegelachse für dieses Dreieck.

Zuerst berechnen wir den Radius des Halbkreises. Dazu fällen wir von M_H aus das Lot auf die Seite AC und den dabei entstehenden Lotfußpunkt bezeichnen wir mit L_1. Dieses Lot bzw. die Verbindung von M_H zu L_1 muss dem Radius des Halbkreises entsprechen (da die Seite AC eine Tangente an den Halbkreis darstellt und der Radius eines Kreises immer senkrecht auf einer Tangente an den Kreis steht). Diese Verbindung von M_H zu L_1 bildet zusammen mit den Strecken AM_H und AL_1 ein rechtwinkliges Dreieck mit einem rechten Winkel bei L_1. In diesem Dreieck muss sich im Inneren bei A ein Winkel von 60° befinden, da es sich zugleich um einen der drei inneren Winkel des gleichseitigen Dreiecks ABC handelt. Damit gilt aber:

$sin(60°) = \frac{r_H}{10}$bzw. $r_H = 10 \cdot sin(60°) = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot \sqrt{3}$ mit r_H als Radius des Halbkreises.

Als nächstes berechnen wir den Radius des Kreises. Dazu fällen wir von M_K aus das Lot auf die Seite AC und wir nennen den dabei entstehenden Lotfußpunkt L_2. Dieses Lot muss wiederum dem Radius des Kreises entsprechen. Da die Verbindungen von M_H nach L_1 und von M_K nach L_2 beide senkrecht zu AC sind, sind sie parallel zueinander. Aber damit ergibt sich eine Situation, in der der zweite Strahlensatz angewendet werden kann. Es gilt:

$$\frac{M_K L_2}{M_H L_1} = \frac{M_K C}{M_H C}$$

Die Strecke von M_H nach C lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ausrechnen, da sie zusammen mit den Verbindungen von A nach M_H und A nach C ein rechtwinkliges Dreieck bildet:

$$\begin{aligned} 10^2 + |M_H C|^2 &= 20^2 \\ 100 + |M_H C|^2 &= 400 \\ |M_H C|^2 &= 300 \\ |M_H C| &= \sqrt{300} \end{aligned}$$

Die Strecke von M_K nach L_2 entspricht dem Radius des Kreises (r_K), die von M_H nach L_1 dem Radius des Halbkreises (den wir bereits ausgerechnet haben). Und die Strecke von M_K nach C bildet zusammen mit der Strecke von M_H nach M_K (die gleich $r_K + r_H$ ist) die Strecke von M_H nach C (deren Länge wir bereits kennen). Sie lässt sich also ausdrücken als $\sqrt{300} - r_H - r_K = \sqrt{300} - 5 \cdot \sqrt{3} - r_K$. Damit kann der oben angegebene zweite Strahlensatz umgeformt werden zu:

$$\frac{r_K}{5 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{300} - 5 \cdot \sqrt{3} - r_K}{\sqrt{300}}$$

Damit ergibt sich, wenn wir mit den Nennern multiplizieren:

$$\sqrt{300} \cdot r_K = \sqrt{300} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} - \left(5 \cdot \sqrt{3}\right)^2 - 5 \cdot \sqrt{3} \cdot r_K$$

$$\sqrt{300} \cdot r_K + 5 \cdot \sqrt{3} \cdot r_K = \sqrt{300} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} - 75$$

$$r_K\left(\sqrt{300} + 5 \cdot \sqrt{3}\right) = 10 \cdot \sqrt{3} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} - 75$$

$$r_K \cdot \left(10 \cdot \sqrt{3} + 5\sqrt{3}\right) = 150 - 75$$

$$r_K \cdot \left(15 \cdot \sqrt{3}\right) = 75$$

$$r_K \cdot \left(15 \cdot \sqrt{3}\right) = 25 \cdot 3$$

$$r_K = \frac{25}{15} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{3}$$

Antwort: Der Radius des Halbkreises ist $5 \cdot \sqrt{3}$cm, der des Kreises $\frac{5}{3} \cdot \sqrt{3}$cm.

AUFGABE 4 (UHREN)

Hier sind individuelle, kreative und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht.