Mathe-Treff OTW 2024

Lösungen für die Klassenstufe 9/10

AUFGABE 1 (Würfelkomposition)

a)

$3+3+3+3+3+3+3+3+3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b)

Der gesamte Würfel besteht aus $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
Würfeln. Zieht man die äußeren Schichten ab, bleiben $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$
bemalte Würfel im Inneren übrig.

c)

Der Würfel besteht aus $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleinen Würfeln. Auf jeder Seite wird der mittlere Würfel entfernt. Außerdem der Würfel ganz in der Mitte. Insofern werden 7 sieben kleine Würfel entfernt.

Daher bleiben 20 kleine Würfel übrig.

d)

Der Würfel ohne Löcher besteht aus $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kleinen Würfeln. Durch das Entfernen werden 44 kleine Würfel entfernt und 81 kleine Würfel bleiben übrig.
Man kann sich das so vorstellen:
Der 5er Würfel wird in fünf Schichten (von oben nach unten) zerlegt. In der ersten, der dritten und der fünften Schicht sind jeweils 5+5+5+3+3= 21 Würfel enthalten. In der zweiten und vierten Schicht sind jeweils 9 kleine Würfel enthalten.
Dies ergibt zusammen 21+21+21+9+9 = 81. Es fehlen also 44 Würfel.

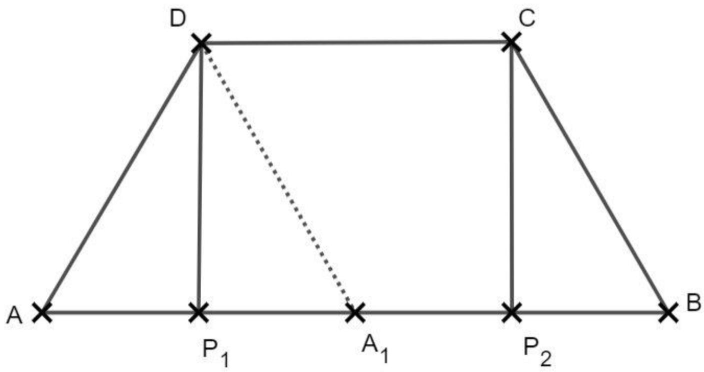
e)

Der Würfel ohne Löcher besteht aus $7^3 = 343$ kleinen Würfeln.

Der „5er“ Würfel hatte pro Seitenfläche 4 Löcher. Demzufolge hat der „7er“ Würfel pro Seitenfläche 9 Löcher.

Man zerlegt den 7er Würfel in sieben Schichten (von oben nach unten). In der ersten, der dritten und der fünften und siebten sind jeweils 7+7+7+7+4+4+4=40 Würfel enthalten. In der zweiten und vierten und sechsten Schicht sind jeweils 9 Würfel.
Dies ergibt zusammen 40+40+40+40+12+12+12 = 208. Es fehlen also 343 - 208 = 135 Würfel.

AUFGABE 2 (Das besondere Viereck)



Die Strecken BC, CD und DA sind alle gleich lang. Diese Länge bezeichnen wir ab jetzt mit a. In unserem Trapez müssen die Strecken AB und DC zueinander parallel sein, da AB die längste Seite ist.

Wir zeichnen von D aus eine senkrechte Verbindung zur Strecke AB. Diese Verbindung erreicht die Strecke AB in einem Punkt P_1. Dieser Punkt muss zwischen A und B liegen, da die Strecke AB die längste Seite des Trapezes ist. Wenn man nun den Punkt A an der gerade eben eingezeichneten senkrechten Verbindung spiegelt, so erhält man einen neuen Punkt A_1. Das Dreieck AA_1D muss ein gleichseitiges Dreieck sein, da der Innenwinkel bei A 60° groß ist und derjenige bei A_1 aufgrund der Spiegelung ebenfalls 60° groß sein muss (weshalb dann auch der dritte Winkel des Dreiecks bei D dieselbe Größe haben muss). In einem gleichseitigen Dreieck sind aber alle Seiten gleich lang und von der Strecke AD wissen wir schon, dass sie die Länge a hat. Deshalb hat die Strecke AA_1 die Länge a und die Strecke AP_1 muss die Länge a/2 haben.

Als nächstes zeichnen wir auch von C aus eine senkrechte Verbindung zur Strecke AB. Diese Verbindung erreicht die Strecke AB in einem Punkt P_2. Die Strecke BP_2 muss wie die oben schon betrachtete Strecke AP_1 die Länge a/2 haben. Die beiden Dreiecke AP_1D und P_2BC sind nämlich rechtwinklige Dreiecke, in denen jeweils die Hypotenuse und eine Kathete gleich lang sind. Die Hypotenuse ist nämlich AD bzw. BC (die beide die Länge a haben) und eine Kathete ist jeweils DP_1 bzw. CP_2 (die gleich lang sein müssen, weil sie jeweils senkrecht von einer Strecke zu einer dazu parallelen Strecke verlaufen).

Von der Strecke AB kennen wir jetzt die Länge von AP_1 und von BP_2. Uns fehlt nur noch P_1P_2. Die Punkte P_1P_2CD müssen aber ein Rechteck bilden, da DP_1 und CP_2 senkrecht von einer Strecke zu einer dazu parallelen Strecke verlaufen. Deshalb hat P_1P_2 die Länge a.

Damit ergibt sich: Die Strecke AB hat die Länge $\frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 2a$.

Die Höhe des Trapezes entspricht der Länge der Strecke DP_1. Dazu benutzen wir das rechtwinklige Dreieck AP_1D. Seine Hypotenuse hat die Länge a (die Strecke AD). Die Kathete AP_1 ist bekannt: Sie hat die Länge a/2. Damit ergibt sich für die fehlende Strecke DP_1 (also die Höhe h):

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2$$
$$\frac{a^2}{4} + h^2 = a^2$$
$$h^2 = \frac{3}{4}a^2$$
$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Damit können wir Fläche und Umfang ausrechnen:

$$U = a + a + a + 2a = 5a$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (2a + a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2$$

AUFGABE 3 (Tischtennismeisterschaft)

Es sei n die Anzahl der Teilnehmer. Teilnehmer n tritt gegen $(n-1)$ Teilnehmer an; Teilnehmer $(n-1)$ gegen $(n-2)$ Teilnehmer (das Spiel gegen Teilnehmer n haben wir bei diesem schon mitgezählt), Teilnehmer $(n-2)$ gegen $(n-3)$ Teilnehmer, usw. Insgesamt gibt es also $(n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2} = 91$ Spiele.

Umformungen ergeben: $n^2 - n - 182 = 0$. Die Gleichung hat die Lösungen $n = 14$ und $n = -13$.

Es müssen somit 14 Teilnehmer gewesen sein. Lisa belegte dann den 12. Platz.

AUFGABE 4 (UHREN)

Hier sind individuelle, kreative und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht.