

Mathe-Treff OTW 2024

Lösungen für die Klassenstufe 7/8

AUFGABE 1 (Würfelkomposition)

a)

$$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

b)

Der gesamte Würfel besteht aus $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

Würfeln. Zieht man die äußeren Schichten ab, bleiben $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

bemalte Würfel im Inneren übrig.

c)

Der Würfel besteht aus $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ kleinen Würfeln. Auf jeder Seite wird der mittlere Würfel entfernt. Außerdem der Würfel ganz in der Mitte. Insofern werden 7 sieben kleine Würfel entfernt.

Daher bleiben 20 kleine Würfel übrig.

d)

Der Würfel ohne Löcher besteht aus $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ kleinen Würfeln. Durch das Entfernen werden 44 kleine Würfel entfernt und 81 kleine Würfel bleiben übrig.

Man kann sich das so vorstellen:

Der 5er Würfel wird in fünf Schichten (von oben nach unten) zerlegt. In der ersten, der dritten und der fünften Schicht sind jeweils $5+5+5+3+3=21$ Würfel enthalten. In der zweiten und vierten Schicht sind jeweils 9 kleine Würfel enthalten.

Dies ergibt zusammen $21+21+21+9+9=81$. Es fehlen also 44 Würfel.



AUFGABE 2 (Spardosen)

Verteilt man statt 2024 Münzen eine Münze mehr, also 2025 Münzen und legt diese zusätzliche Münze zum Rest, so hat der Rest gleich viele Münzen wie in jeder Dose sind. Sind jetzt in jeder der a Dosen b Münzen, so gilt:

$$2025 = a \cdot b + b = b \cdot (a + 1), \text{ mit } b > 1, \text{ da mindestens eine Münze von 2024 übrigbleiben soll.}$$

Die Zahl 2025 hat folgende Teilmengen

$$T_{2025} = \{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025\} \text{ bzw. folgende Primfaktorzerlegung: } 2025 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3^4 \cdot 5^2 \cdot 23.$$

Schreibt man alle möglichen Lösungen systematisch in einer Tabelle auf so ergibt sich folgende Tabelle:

Anzahl der b Münzen pro Dose	3	5	9	15	25	27	45	75	81	135	225	405	675
$(b + 1) = \frac{2025}{a}$	675	405	225	135	81	75	45	27	25	15	9	5	3
Anzahl der a Dosen	674	404	224	134	80	74	44	26	24	14	8	4	2

Beispielsweise gilt: Man hat 26 Dosen und in jeder Dose sind 75 Münzen, also $26 \cdot 75 = 1950$. Die restlichen Münzen sind laut Aufgabenstellung 74. Es gilt also $1950 + 74 = 2024$.

AUFGABE 3 (Auf dem Bahnsteig)

Der Zug ist 240 Meter lang:

$$x - 40 = \frac{2}{3}(x + 60) \Leftrightarrow x = 240$$

Die Gleichung beruht auf der in beiden Fällen konstanten Geschwindigkeit des Zuges. Die Strecken sind $x - 40$ und $x + 60$, aber die Zeiten sind nicht gleich.

Der Zug braucht für $x + 60$ m 1,5mal so viel Zeit wie für $x - 40$ m. Da der Faktor 1,5 aber im Nenner steht, bleibt schließlich $\frac{2}{3}$ übrig.

Die Geschwindigkeiten von Zug und Personen spielen einzeln keine Rolle, nur ihr Verhältnis zueinander (in diesem Fall ist der Zug fünfmal schneller).

AUFGABE 4 (UHREN)

Hier sind individuelle, kreative und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht.